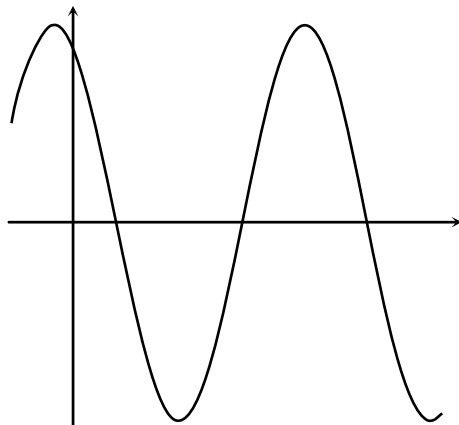


MATEMÁTICA

01. Considere a função f , com domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, dada por $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$, que tem parte de seu gráfico esboçado a seguir.



Analise a veracidade das afirmações seguintes acerca de f :

- 0-0) $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi/6)$, para todo x real.
- 1-1) f é periódica com período 2π .
- 2-2) As raízes de $f(x)$ são $-\pi/6 + 2k\pi$, com k inteiro.
- 3-3) $f(x) \geq -\sqrt{3}$, para todo x real.
- 4-4) $f(x) \leq 2$, para todo x real.

Resposta: FVFFV

Justificativa:

Temos $f(x) = 2[(\sqrt{3}/2) \cos x - \sin x(1/2)] = 2 \cos(\pi/6 + x)$ e a alternativa 0-0) é falsa. A proposição 1-1) é verdadeira, pois as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π . As raízes de $f(x)$ são $-\pi/6 + \pi/2 + k\pi = \pi/3 + k\pi$, com k inteiro, logo 2-2) é falsa. Temos $f(x) = 2 \cos(x + \pi/6)$ e os valores de f variam de -2 a 2 , logo 3-3) é falsa e 4-4) é verdadeira.

02. O Jogo do Nim é um jogo de estratégia entre dois jogadores com palitos dispostos em três linhas. A quantidade de palitos por linha é estabelecida no início do jogo. Cada jogador retira, na sua vez de jogar, uma quantidade qualquer de palitos de uma só linha (pelo menos um palito). Vence o jogo aquele que retirar o último grupo de palitos. João e Maria estão jogando o Jogo do Nim com 3 palitos por linha, e Maria começa retirando os três palitos de alguma linha. A propósito, analise as seguintes afirmações:

- 0-0) Se João retirar apenas um palito de outra linha, ele com certeza vence o jogo.
- 1-1) Se João retirar dois palitos de outra linha, ele com certeza vence o jogo.
- 2-2) Se João retirar todos os palitos de outra linha, ele só vence se Maria permitir.
- 3-3) Independentemente da jogada de João, Maria vencerá se quiser.
- 4-4) Com a configuração inicial de 3 palitos por linha, a única jogada inicial que garante a vitória é a usada por Maria.

Resposta: FFVVV

Justificativa:

Se João retira todos os palitos de uma linha, Maria vence retirando os últimos palitos da outra linha. Se João retira um ou dois palitos de uma linha, Maria faz a mesma jogada na outra linha e vence o jogo repetindo as jogadas de João. Se Maria começasse o jogo deixando algum palito na linha, João poderia inverter a situação retirando os palitos restantes nesta linha.

- 03.** Antônio nasceu no século vinte, e seu pai, que tinha 30 anos quando Antônio nasceu, tinha x anos no ano x^2 . Considerando estas informações, analise as afirmações seguintes:

- 0-0) O pai de Antônio nasceu no século vinte.
- 1-1) O pai de Antônio nasceu em 1936.
- 2-2) O pai de Antônio tinha 44 anos em 1936.
- 3-3) Antônio nasceu em 1922.
- 4-4) Antônio nasceu em 1936.

Resposta: FFVVF

Justificativa:

Temos $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$; portanto, x deve estar entre 40 e 50. Testando: $41^2 = 1681$, $42^2 = 1764$, $43^2 = 1849$, $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$. Então, $x = 43$ ou $x = 44$ ou $x = 45$.

Se $x = 43$, $x^2 = 1849$, então, o pai de Antônio nasceu em 1806, e Antônio em 1836.

Se $x = 44$, $x^2 = 1936$, então, o pai de Antônio nasceu em 1892, e Antônio, em 1922.

Se $x = 45$, $x^2 = 2025$ então o pai de Antônio nasceu em 1980 e Antônio em 2010.

- 04.** Na nota de compra de certo produto aparecem o número de unidades adquiridas e o preço total pago. O número de unidades foi 72, mas dois dígitos do preço pago estão ilegíveis e aparece R\$ _13,3_. Determine os dígitos ilegíveis e assinale seu produto.

Resposta: 30

Justificativa:

O número _133_ é divisível por 8; logo, o número 33_ também é divisível por 8, e o último dígito da direita é 6. Agora, o número _1336 é divisível por 9, e o primeiro dígito é 5, pois a soma dos dígitos é divisível por 9. A resposta é $6.5 = 30$.

- 05.** Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, A_1 , A_2 e A_3 na construção de três tipos de carros, C_1 , C_2 e C_3 . A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está na tabela a seguir:

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1 , 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3 , qual o total de carros construídos (dos tipos C_1 , C_2 ou C_3)?

Resposta: 9

Justificativa:

Sejam x , y e z os respectivos números de carros dos tipos C_1 , C_2 e C_3 que foram construídos. Temos o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 26 \\ x + y + 2z = 11 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$$

Subtraindo da primeira igualdade o dobro da segunda, obtemos $y = 26 - 22 = 4$. Substituindo y na segunda e terceira equações, obtemos $x + 2z = 7$ e $3x + z = 11$. Segue que $z = 2$ e $x = 3$. Temos $x + y + z = 9$.

06. Se as raízes da equação

$$x^3 - 7x^2 - 28x + k = 0$$

são termos de uma progressão geométrica, determine e assinale o valor do termo constante k .

Resposta: 64

Justificativa:

Sejam a/q , a e aq os termos da progressão geométrica. Das relações entre os coeficientes e as raízes da equação temos $a/q + a + aq = 7$, $a/q \cdot a + a/q \cdot aq + a \cdot aq = -28$ e $a/q \cdot a \cdot aq = a^3 = -k$. Da primeira igualdade segue que $a(1/q + 1 + q) = 7$ e da segunda temos $a^2(1/q + 1 + q) = -28$. Daí, $a = -28/7 = -4$ e $k = 64$. Observe que a razão da progressão geométrica é raiz da equação $q^2 + 11q/4 + 1 = 0$ e vale $(-11 + \sqrt{57})/8$ ou $(-11 - \sqrt{57})/8$.

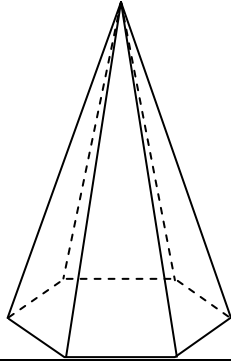
07. O proprietário de uma loja comprou certo número de artigos, todos custando o mesmo valor, por R\$ 1.200,00. Cinco dos artigos estavam danificados e não puderam ser comercializados; os demais foram vendidos com lucro de R\$ 10,00 por unidade. Se o lucro total do proprietário com a compra e a venda dos artigos foi de R\$ 450,00, quantos foram os artigos comprados inicialmente?

Resposta: 60

Justificativa:

Seja x o número de artigos comprados inicialmente. O preço de custo de cada artigo foi $1200/x$, e o valor faturado com a venda dos artigos não danificados foi $(1200/x + 10)(x - 5)$. Temos $(1200/x + 10)(x - 5) = 1650$. Simplificando, obtemos $(120 + x)(x - 5) = 165x$ ou $x^2 - 50x - 600 = 0$ e $x = 60$ ou -10 , sendo 60 o valor aceitável.

08. Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm^3 . Dado: use a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,73$.

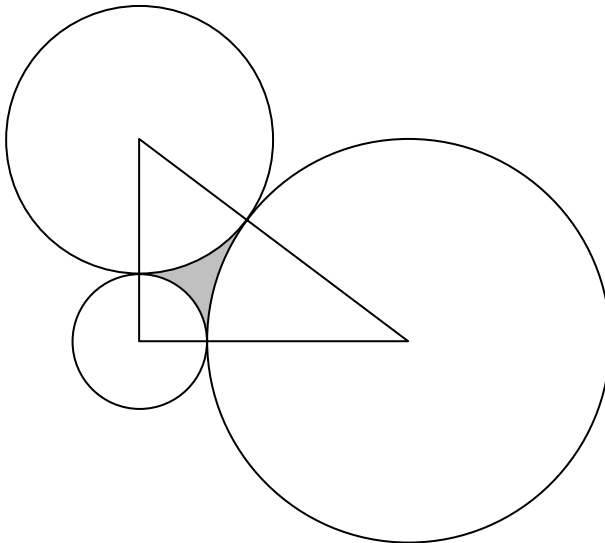


Resposta: 83

Justificativa:

Se o lado da base mede a , temos que a área da base mede $3a^2\sqrt{3}/2$. Se h é a altura dos triângulos das faces laterais temos que a área lateral mede $6ah/2 = 3ah$. Da condição dada no problema, temos que $3ah = 2.3 a^2\sqrt{3}/2$ e $h = a\sqrt{3}$. Também temos $h^2 = (a\sqrt{3}/2)^2 + 6^2$ e segue que $3.3a^2/4 = 36$ e $a = 4$. O volume da pirâmide é $(3.4^2\sqrt{3}/2)6/3 = 48\sqrt{3} \approx 83,04 \text{ cm}^3$.

09. Na ilustração a seguir, temos três circunferências tangentes duas a duas e com centros nos vértices de um triângulo com lados medindo 6 cm, 8 cm e 10 cm.



Calcule a área A da região do triângulo, em cm^2 , limitada pelas três circunferências e indique 10A.

Dado: use as aproximações $\pi \approx 3,14$ e $\arctg 0,75 \approx 0,64$.

Resposta: 19

O triângulo em questão é retângulo. Se a , b e c são os raios das circunferências, em ordem crescente, temos $a + b = 6$, $a + c = 8$ e $b + c = 10$. Segue que $a + b + c = 12$ e $a = 12 - 10 = 2$ cm, $b = 12 - 8 = 4$ cm, $c = 12 - 6 = 6$ cm. As circunferências têm raios 2 cm, 4 cm e 6 cm. O ângulo agudo do triângulo, oposto ao cateto que mede 6 cm, tem tangente $6/8 = 0,75$ e mede $0,64$ radianos. O outro ângulo agudo mede $3,14/2 - 0,64 = 0,93$ radianos. A área procurada mede $A = 6.8/2 - 0,64.36/2 - 0,93.16/2 - 3,14.4/4 = 1,9$ cm².

10. A representação geométrica dos números complexos z que satisfazem a igualdade $2|z - i| = |z - 2|$ formam uma circunferência com raio r e centro no ponto com coordenadas (a, b) . Calcule r , a e b e assinale $9(a^2 + b^2 + r^2)$.

Resposta: 40

Justificativa:

Escrevendo $z = x + yi$, a igualdade dada se escreve como $4(x^2 + (y - 1)^2) = (x - 2)^2 + y^2$ que se simplifica como $3x^2 + 3y^2 + 4x - 8y = 0$ ou $(x + 2/3)^2 + (y - 4/3)^2 = 20/9$, a equação da circunferência com centro no ponto $(-2/3, 4/3)$ e raio $2\sqrt{5}/3$. Temos $9(a^2 + b^2 + r^2) = 4 + 16 + 20 = 40$.

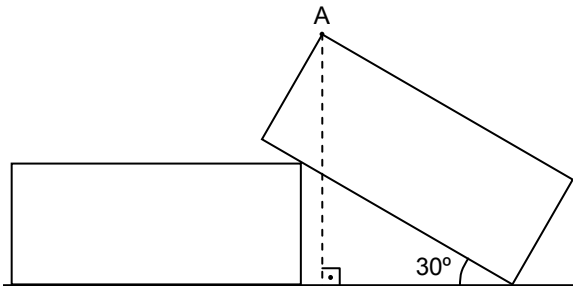
11. Seja (a, b) o ortocentro do triângulo com vértices nos pontos com coordenadas $(5, 1)$, $(7, 2)$ e $(1, 3)$. Assinale $4a - 2b$.

Resposta: 24

Justificativa:

A altura relativa ao vértice $(7, 2)$ tem equação $y - 2 = 2(x - 7)$, e a altura relativa ao vértice $(5, 1)$ tem equação $y - 1 = 6(x - 5)$. Subtraindo as duas igualdades, obtemos $-1 = -4x + 16$ e $x = 17/4$, $y = 2 + 2 \cdot (-11/4) = -7/2$.

12. Na ilustração abaixo, temos dois retângulos congruentes com base medindo 12 cm, e altura 5 cm. Qual o inteiro mais próximo da distância, em cm, do ponto A até a horizontal? Dado: use a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,73$.

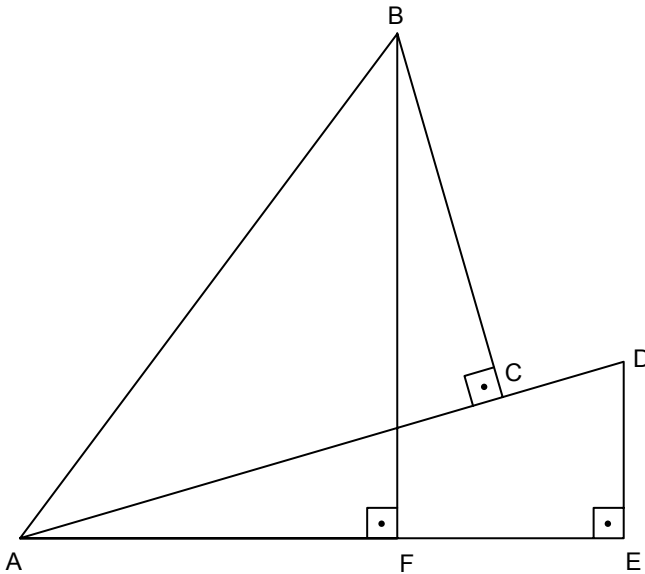


Resposta: 10

Justificativa:

A diagonal do retângulo mede $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm. A altura do ponto A é $13\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 13(\text{sen } \alpha \cdot \cos 30^\circ + \text{sen } 30^\circ \cdot \cos \alpha)$, com α sendo o ângulo entre a diagonal do retângulo e o lado que mede 13 cm. Temos $\text{sen } \alpha = 5/13$ e $\cos \alpha = 12/13$. Segue que a altura do ponto A é $5 \cdot \sqrt{3}/2 + 1/2 \cdot 12 \approx 5 \cdot 1,73/2 + 6 = 10,325$ cm.

13. Na figura abaixo $AB = AD = 25$, $BC = 15$ e $DE = 7$. Os ângulos DEA, BCA e BFA são retos. Determine e assinale AF.



Resposta: 15

Justificativa:

Temos $AC = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ e $AE = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. Seja G o ponto de interseção de AC e BF. São semelhantes os triângulos GCB, GFA e DEA. Então, $CG = 35/8$ e $BG = 25/8$; portanto, $AG = AC - 35/8 = 20 - 35/8 = 125/8 = BG$ e $AF = BC = 15$.

14. Um escritório tem 7 copiadoras e 8 funcionários que podem operá-las. Calcule o número m de maneiras de se copiar simultaneamente (em máquinas distintas, sendo operadas por funcionários diferentes) 5 trabalhos idênticos neste escritório. Indique a soma dos dígitos de m.

Resposta: 09

Justificativa:

Podemos escolher, ordenadamente, os cinco funcionários de 8.7.6.5.4 maneiras e as 5 copiadoras de 7.5.4.3.2 maneiras. Uma vez que não importa qual trabalho é feito em qual copiadora, temos um total de $m = (8.7.6.5.4)(7.6.5.4.3)/(5.4.3.2.1) = 141120$ maneiras diferentes de se executar o trabalho.

- 15.** Um construtor compra 60% das suas telhas da Companhia A e o restante da Companhia B. Suponha que 96% das telhas compradas de A são entregues sem defeito, e o mesmo ocorre com 98% das telhas de B. Se uma telha foi entregue com defeito, calcule a probabilidade percentual $p\%$ de ter sido entregue pela Companhia A. Indique p .

Resposta: 75

Justificativa:

Do total de telhas, são entregues com defeito $0,04.60 + 0,02.40 = 3,2\%$, e a probabilidade de uma telha entregue com defeito ser da Companhia A é de $2,4/3,2 = 3/4 = 75\%$.

- 16.** No desenvolvimento binomial de $(1 + 1/3)^{10}$, quantas parcelas são números inteiros?

Resposta: 02

Justificativa:

A maior potência de 3 que divide $10!$ é 3^4 , os cinco primeiros coeficientes binomiais são 1, 10, 45, 120 e 210. Somente $1/3^0$ e $45/3^2$ são inteiros.