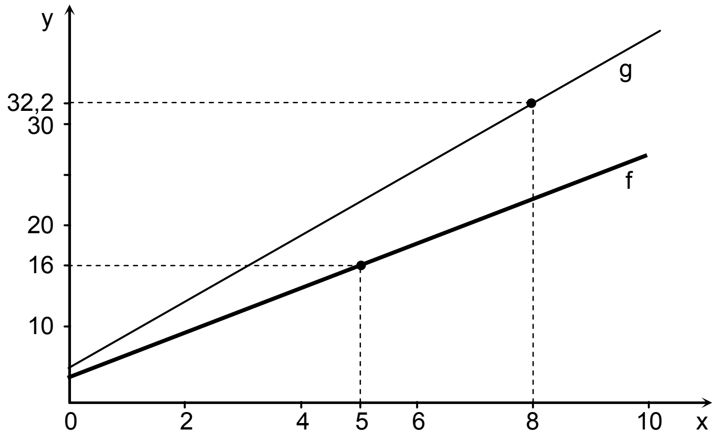
MATEMÁTICA

01. O preço pago por uma corrida de táxi normal consiste de uma quantia fixa de R$ 3,50, a bandeirada, adicionada de R$ 0,25 por cada 100 m percorridos, enquanto o preço pago por uma corrida de táxi especial consiste de uma quantia fixa de R$ 4,20 adicionada de R$ 0,35 por cada 100 m percorridos. Seja f(x) o preço pago, em reais, por uma corrida de x km no táxi normal e g(x) o preço pago, em reais, por uma corrida de x km no táxi especial. Analise as afirmações seguintes referentes a esta situação.

0-0) f(10) = 28,50 reais
1-1) g(20) = 74,20 reais
2-2) Os gráficos de f(x) e g(x), para $0 \le x \le 10$, estão esboçados a seguir (são, respectivamente, as semi-retas com origem nos pontos (0, 3,5) e (0, 4,2) e com inclinações 2,5 e 3,5)



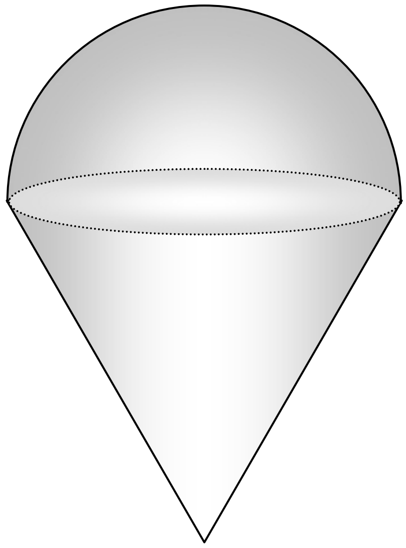
3-3) Para qualquer corrida, o preço do táxi especial é 30% mais caro que o táxi normal.
4-4) g(x) – f(x) = 0,7 + x.

Resposta: VVVFV

Justificativa:

Temos f(x) = 3,5 + 2,5.x e g(x) = 4,2 + 3,5.x. Segue que f(10) = 28,50 reais e g(20) = 74,20. Temos g(10) = 39,20 reais e g(10)/f(10) = 1,3754, logo o preço de uma corrida de 10km no táxi especial é superior em 37,54% à mesma corrida no táxi normal. Os gráficos de f(x) e g(x) para $x \ge 0$ são semi-retas passando por (0, 3,5) e (0, 4,2) e com inclinações 2,5 e 3,5, respectivamente. g(x) – f(x) = 0,7 + x.

02. O sólido ilustrado abaixo é limitado por um hemisfério e um cone. Sejam **r** o raio do hemisfério (que é igual ao raio da base do cone) e **h** a altura do cone. Acerca dessa configuração, analise a veracidade das afirmações seguites:



0-0) se **h = 2r** o volume do hemisfério e o do cone serão iguais.
1-1) se **h = 2r** a área lateral do cone será igual a área do hemisfério (sem incluir o círculo da base).
2-2) mantendo o valor de **h** e duplicando o valor de **r** o volume total duplicará.
3-3) duplicando os valores de h e r a área total do sólido ficará multiplicada por quatro.
4-4) para **r = 3** e **h = 4**, a área total do sólido é **33π**.

Resposta: **VFFVV**

Justificativa:

Se h = 2r o volume do cone será $\pi r^2(2r)/3 = 2\pi r^3/3$ e o volume do hemisfério será $2\pi r^3/3$. Se h = 2r, a área lateral do cone será $\pi r\sqrt{(2r)^2+r^2} = \pi r^2\sqrt{5}$ e a do hemisfério será $2\pi r^2$. Duplicando o valor de r e mantendo o de h, o volume do cone quadruplicara, mas o volume do hemisfério ficará multiplicado por oito. Duplicando os valores de r e de h, a área da superfície do sólido quadruplicará. Para r = 3 e h = 4, a área da superfície do sólido será $2\pi.3^2$ + $\pi.3.\ \sqrt{3^2+4^2} = 33\pi$.

03. Suponha que seu nutricionista recomendou que você tomasse 350mg de vitamina C, 4200 UI de vitamina A e 500 UI de vitamina D. Cada unidade de suplemento X, Y e Z contêm as quantidades indicadas na tabela abaixo das vitaminas C, A e D:

	X	Y	Z
Vitamina C	50 mg	100 mg	50 mg
Vitamina A	1000 UI	200 UI	500 UI
Vitamina D	100 UI	200 UI	0 UI

Admitindo essas informações analise as afirmações abaixo:

0-0) para atender corretamente às recomendações de seu nutricionista você pode utilizar: três unidades do suplemento x, uma unidade do suplemento y e duas unidades do suplemento z.
1-1) para atender corretamente às recomendações de seu nutricionista você pode utilizar: duas unidades de cada um dos suplementos.
2-2) é impossível atender às recomendações do nutricionista usando os suplementos X, Y e Z.
3-3) para atender corretamente às recomendações de seu nutricionista você pode utilizar: seis unidades dentre os suplementos X, Y e Z, escolhidas como desejar.

4-4) é possível atender às recomendações do nutricionista de infinitas maneiras diferentes.

Resposta: VFFFF

Justificativa:

Sejam x, y e z o número de suplementos respectivos de X, Y e Z necessários para atender as recomendações do nutricionista. Temos

$$\begin{cases} 50x + 100y + 50z = 350 \\ 1000x + 200y + 500z = 4200 \\ 100x + 200y + 0z = 500 \end{cases}.$$

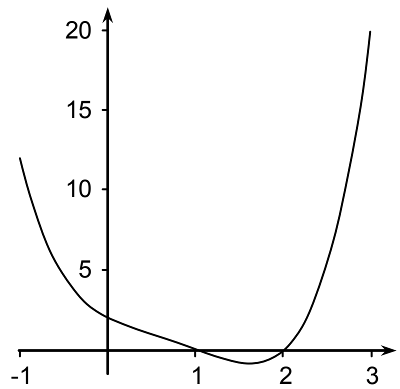
Simplificando as equações obtemos

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 10x + 2y + 5z = 42 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Subtraindo a terceira igualdade da primeira obtemos z = 7- 5 = 2. Substituindo x = 5 – 2y e z = 2 na segunda equação obtemos 10(5 – 2y) + 2y + 10 = 42 e y = 1.

04. O gráfico da função real f dada por

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ com a, b, c e d constantes reais está esboçado a seguir.



Se o gráfico passa pelos pontos (1, 0), (2, 0), (0, 2) e (-1, 12) é correto afirmar que:

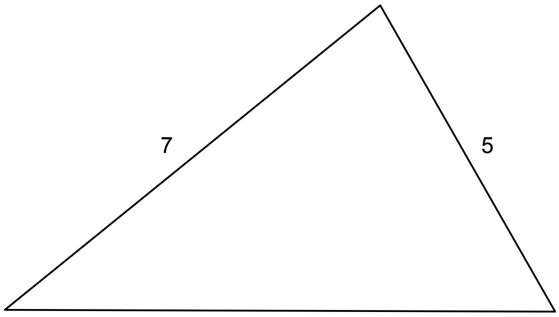
0-0) f(x) é divisível por $x^2 – 3x + 2$.
1-1) f(x) é múltiplo de $x^2 + 1$.
2-2) f(x) admite quatro raízes reais.
3-3) A soma das raízes de f(x) é 3.
4-4) O produto das raízes de f(x) é 2.

Resposta: VVFVV

Justificativa:

1 e 2 são raízes de f(x), logo f(x) é divisível por $(x – 1)(x – 2) = x^2 – 3x + 2$. f(0) = d = 2 Dividindo f(x) por $x^2 – 3x + 2$ obtemos $f(x) = (x^2 – 3x + 2)(x^2 + rx + s)$ e f(0) = 2s e s =1. f(-1) = 6(1 – r +1) e r = 0. Segue que f(x) é divisível por $x^2 + 1$. f(x) admite precisamente duas raízes reais. $f(x) = x^4 – 3x^3 + 3x^2 - 2$. A soma das raízes de f(x) é 3 e o produto das raízes é 2.

05. Sobre o triângulo, cujos lados medem 8, 7 e 5, podemos afirmar que:



0-0) um dos ângulos internos do triângulo mede 60º.
1-1) o maior dos ângulos internos mede mais que o dobro da medida do menor dos ângulos internos do triângulo.
2-2) a área deste triângulo é 17,5.
3-3) o triângulo é obtusângulo;
4-4) o menor dos ângulos internos tem seno igual a $\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

Resposta: : VVFFV

Justificativa:

Supondo que AB = 5, AC = 7 e BC = 8; e denominando α, β e γ os ângulos, respectivamente, dos vértices A, B e C. Usando lei dos cossenos temos:

$\cos\alpha = \frac{1}{7}, \cos\beta = \frac{1}{2}$ e $\cos\gamma = \frac{11}{14}$. O ângulo β mede 60º.

$\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = \frac{23}{98} > \frac{1}{7} = \cos\alpha$, como a função cosseno é decrescente no 1º quadrante, temos que $\alpha > 2\gamma$.

Todos os cossenos são positivos, logo os ângulos são todos agudos. Como a área de um triângulo é

$S = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{AC}.\text{sen}\alpha < 17{,}5$, pois, $\text{sen}\alpha < 1$. $\text{sen}\gamma = \sqrt{1-(\cos\gamma)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

06. Em uma escolinha de futebol, a razão entre o número total de alunos e o número de meninas é 13/5. Se o número de meninos da escola é 120, quantas são as meninas?

Resposta: 75

Justificativa:

A razão entre o número de meninos e o de meninas na escola é 13/5 – 1 = 8/5. Portanto, o número de meninas é 120.5/8 = 75.

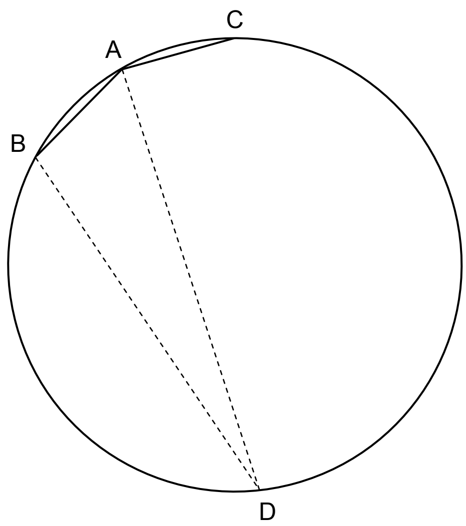
07. Suponha que: a probabilidade de cada pessoa, de um grupo de quatro pessoas, ser aprovada no vestibular seja de 60%. Calcule a probabilidade percentual de, exatamente, duas das quatro pessoas serem aprovadas no vestibular e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: 18

Justificativa:

As duas pessoas podem ser escolhidas, do grupo de quatro, de 4.3/2 = 6 maneiras diferentes. A probabilidade percentual de duas pessoas escolhidas ao acaso no grupo passarem no vestibular é $6.0{,}6^2.0{,}4^2.100 = 34{,}56\%$.

08. Sejam AB e AC cordas de mesma medida em uma circunferência e D um ponto no arco maior BC, conforme ilustração abaixo. Se o ângulo BAC mede 150° assinale a medida, em graus, do ângulo BDA.



Resposta: 15

Justificativa:

A medida do arco AB é $180^o - 150^o = 30^o$ e a medida do ângulo inscrito BDA é $30^o/2 = 15^o$.

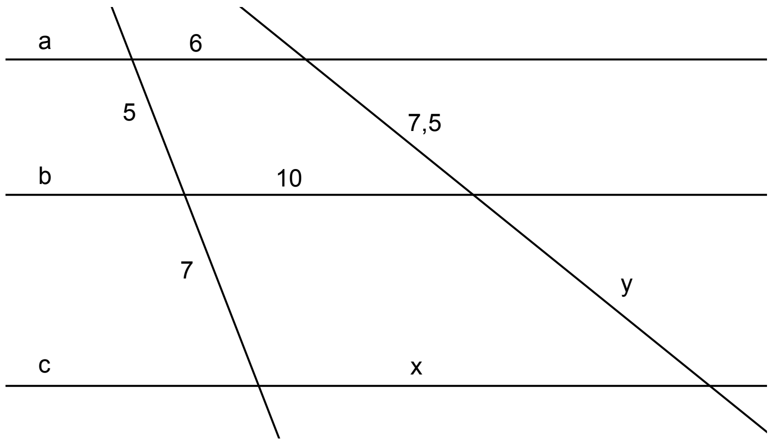
09. Oito rapazes e doze moças concorrem ao sorteio de dois prêmios. Serão sorteadas duas dessas pessoas, aleatoriamente, em duas etapas, de modo que o sorteado na primeira etapa concorrerá ao sorteio na segunda etapa. Qual a probabilidade percentual de ser sorteado um par de pessoas de sexos diferentes?

Resposta: 48

Justificativa:

A probabilidade de ser sorteado um rapaz no primeiro sorteio e uma moça no segundo (ou uma moça no primeiro sorteio e um rapaz no segundo) é 8/20.12/20 = 24/100. A probabilidade percentual de ser sorteado um par de pessoas de sexos diferentes é 2.24/100.100 = 48%.

10. Na ilustração a seguir, as retas a, b e c são paralelas.



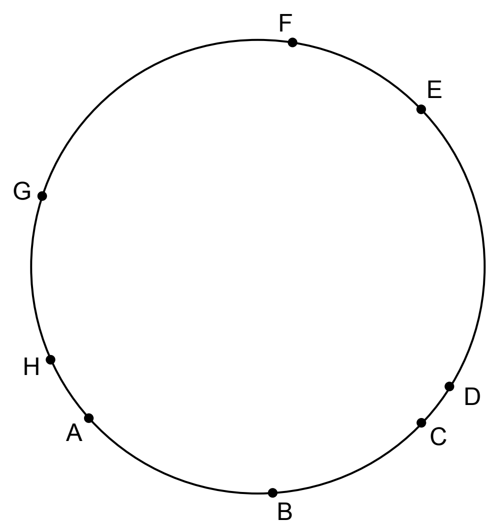
Assinale o inteiro mais próximo de x + y.

Resposta: 26

Justificativa:

Temos, usando o teorema de Tales, que 5/7 = 7,5/y e y = 10,5 e também que 4/(x - 6) = 7,5/18 e x = 15,6.

11. São dados os 8 pontos A, B, C, D, E, F, G e H sobre uma circunferência, como na figura abaixo. De quantas maneiras podem-se formar triângulos com vértices nesses pontos?



Resposta: 56

Justificativa:

Para cada três pontos escolhidos tem-se um triângulo diferente. O número de maneiras de escolher 3 pontos de um conjunto com 8 pontos é C_8^3 = 56.

12. Cinco números distintos A, B, C, 21 e D estão, nesta ordem, em progressão aritmética, de modo que ao eliminarmos C e 21, temos uma progressão geométrica; determine a soma dos cinco números.

Resposta: 75

Justificativa:

Se r é a razão da PA, partindo do termo 21, temos: A = 21 – 3r, B = 21 – 2r e D = 21 + r.

Como A, B e D estão em PG: $A \times D = B^2$; $(21 - 3r)(21 + r) = (21 - 2r)^2$; $7r^2 - 42r = 0$, $r \neq 0$ pois os números são distintos, logo r = 6; A = 3, B = 9, C = 15 e D = 27.

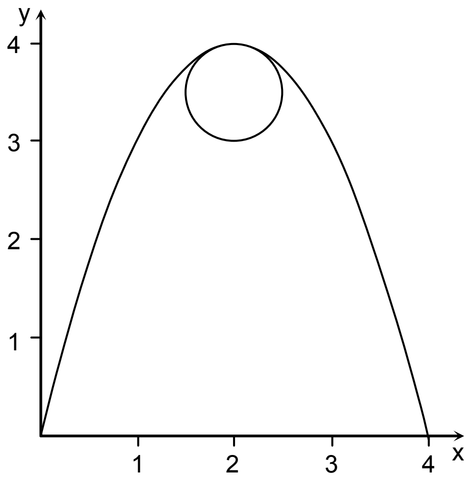
13. Seja $f(x) = x^2 + 4x + 1$, com x sendo um número real. Seja R a região que consiste dos pontos (x, y) do plano que satisfazem $f(x) + f(y) \leq 10$. Indique o inteiro mais próximo da área de R. Dado: use a aproximação $\pi \approx 3{,}14$.

Resposta: 50

Justificativa:

A região consiste dos pontos (x, y) tais que $x^2 + 4x + 1 + y^2 + 4y + 1 \leq 10$. Completando os quadrados obtemos $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 16$. Assim, R é o círculo com centro no ponto (-2, -2) e raio 4 cuja área mede $\pi.4^2 \approx 50{,}24$.

14. A figura abaixo ilustra a parábola com equação $y = -x^2 + 4x$ e uma circunferência de raio r e centro (2, a). O único ponto comum a ambas é o vértice da parábola. O gráfico da circunferência está entre o eixo das abscissas e o gráfico da parábola, exceto pelo ponto comum à circunferência. Assinale a + r.



Resposta: 04

Justificativa:

A equação da parábola é $y - 4 = -(x - 2)^2$ e o vértice é o ponto (2, 4). A circunferência tem equação $(x-2)^2 + (y-a)^2 = r^2$. Substituindo x = 2 e y = 4 na equação da circunferência obtemos $(4 - a)^2 = r^2$ e dai $4 - a = \pm r$. Segue que a + r = 4, pois a < 4.

15. Indique o valor do natural n, n > 0, para o qual o polinômio $n^2x^{2n+1} - 25nx^{n+1} + 150x^{n-1}$ é divisível pelo polinômio $x^2 - 1$.

Resposta: 10

Justificativa:

O polinômio só será divisível por $x^2 - 1$ se tiver 1 e -1 como raízes. Assim, substituindo x = 1, obtemos $n^2 - 25n + 150 = 0$ que tem raízes n = 10 e n = 15. Substituindo x = -1 e n =10 obtemos –100 + 250 – 150 = 0 e substituindo x = -1 e n = 15 obtemos -225 – 375 + 150 = -450. O único valor aceitável de n é 10.

16. Se a é um número real e o número complexo $\frac{a-5i}{5-i}$ é real, qual o valor de a?

Resposta: 25

Justificativa:

Temos

$$\frac{a-5i}{5-i} = \frac{(a-5i)(5+i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{5a+5}{26} + \frac{(a-25)i}{26}$$

que será real se a – 25 = 0 ou a = 25.